Grado en Matemáticas – Examen de Análisis Funcional

1. (1.5 puntos) Sea $A = \{e_{2n-1} + e_{2n} : n\in\mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

   a) Describe los espacios $M = A^{\perp}$ y $M^{\perp}$.

   b) Calcula las proyecciones ortogonales sobre M y $M^{\perp}$.

2. (1.5 puntos) Prueba que, para cada $x\in\ell_p$ $(1 < p < \infty)$, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x(n)}{n}$ es absolutamente convergente y que definiendo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n} \quad (x\in\ell_p)$$

   se obtiene un funcional lineal continuo en ℓ_p. Calcula $\|f\|$ y prueba que f alcanza su norma, es decir, que existe $x\in\ell_p$ tal que $\|x\|_p = 1$ y $f(x) = \|f\|$.

3. (1 punto) Prueba que si X es un espacio normado reflexivo y $x^* \in X^*$, entonces existe $x\in S_X$ tal que $x^*(x) = \|x^*\|$. ¿Es esto cierto si el espacio no es reflexivo?

4. (1 punto) Sea $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $x \in \ell_1$ se verifica que la sucesión $\{x(n)u(n)\}$ está acotada. Prueba que u está acotada.

5. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba, y, cuando sean falsas, indica un contraejemplo (0,5 puntos cada una).

   a) Sean $\|\,.\,\|$ y $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ dos normas completas no equivalentes en un espacio vectorial X. Entonces la aplicación identidad $I_X : (X, \|\,.\,\|) \to (X, |\!|\!|\,.\,|\!|\!|)$ no es continua.

   b) Sea $\{f_n\}$ una sucesión puntualmente acotada de funcionales lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ se obtiene un funcional lineal continuo de X en ℓ_∞.

   c) Sean $\|\,.\,\|_1$ y $\|\,.\,\|_2$ dos normas completas en un espacio vectorial X que tienen los mismos funcionales lineales continuos. Entonces dichas normas son equivalentes.

   d) Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $T_n : c_0 \to c_0$ definido por $T_n(x) = x(n)e_n$. Entonces $T_n\in L(c_0, c_0)$ y $\{T_n\}$ converge puntualmente a cero pero no converge a cero en $L(c_0, c_0)$.

6. (3 puntos) Desarrolla uno de los temas siguientes:

   - Formas geométricas del teorema de Hahn-Banach. Separación de conjuntos convexos.
   - Teorema de categoría de Baire. Teorema de Banach-Steinhaus.
   - Las topologías débil y débil*. Teorema de Mazur. Adherencias débil y débil* de la bola unidad.

Granada, 11 de junio de 2019